Chuyên đề phương trình lượng giác

Phần 1. Ôn tập công thức lượng giác

A. Lý Thuyết

I. Các công thức cơ bản

a) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ b) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ c) $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

d) $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ e) $1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ f) $\tan x.\cot x=1$

II. Giá trị lượng giác cung liên quan đặc biệt

1) Hai cung đối nhau

$\cos(-x)=\cos x$

$\sin(-x)=-\sin x$

$\tan(-x)=-\tan x$

$\cot(-x)=-\cot x$

2) Hai cung bù nhau

$\sin(\pi-x)=\sin x$

$\cos(\pi-x)=-\cos x$

$\tan(\pi-x)=-\tan x$

$\cot(\pi-x)=-\cot x$

3) Hai cung khác nhau 2π

$\sin(x+2\pi)=\sin x$

$\cos(x+2\pi)=\cos x$

$\tan(x+2\pi)=\tan x$

$\cot(x+2\pi)=\cot x$

4) Hai cung khác nhau π

$\sin(\pi+x)=-\sin x$

$\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\tan(\pi+x)=\tan x$

$\cot(\pi+x)=\cot x$

5) Hai cung phụ nhau

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$; $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\tan x$

III. Công thức cộng

1) $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a$

2) $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$

3) $\tan(a\pm b)=\dfrac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}$

IV. Công thức nhân đôi.

1) $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 3) $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

2) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$

V.Công thức nhân ba

1) $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ 2) $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

VI. Công thức hạ bậc. Công thức viết các hàm lượng giác theo $t=\tan\dfrac{x}{2}$

$1+\cos 2x=2\cos^2 x$

$1-\cos 2x=2\sin^2 x$

$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$

VI. Công thức biến đổi tổng và tích

1. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$

$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

2. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$

$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$

$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$

$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$

VII. Một số nhóm công thức thường gặp khi giải phương trình lượng giác.

1) $\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$

2) $\tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$

3) $\cot a+\cot b=\frac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b}$

4) $\cot a-\cot b=-\frac{\sin(a-b)}{\sin a\sin b}$

5) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x.\cos^2 x$

6) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x.\cos^2 x$

B. Bài tập

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$.

b) $\cos^4 x+\sin^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

c) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x.\cos^2 x$.

d) $\frac{\sin x+\cos x}{cosx-\sin x}-\frac{cosx-cosx}{cosx+\sin x}=2\tan 2x$.

e) $4\sin x\cos^3 x-4\sin^3 x\cos x=\sin 4x$.

f) $4\sin x\cos^5 x-4\sin^5 x\cos x=\sin 4x$.

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{\sin 5x+\sin 3x+\sin 4x}{cos5x+\cos 3x+co\,s4x}=\tan 4x$.

b) $\cos x+\sin x\ ^{2}=1+\sin 2x$.

c) $1+\sin 2x=\ \sin x-\cos x\ ^{2}$.

d) $\cot x-\tan x=2\cot 2x$.

Bài 3. Cho $\sin x=\frac{3}{5}, x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P=\cos\ x+\pi\ +\cos 2x$.

Bài 4. Cho $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ và $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ Tính giá trị của biểu thức $A=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin x$.

Bài 5. Cho $\tan x = 2$ Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{2\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}$.

b) $B = \dfrac{2\sin^2 x + \sin x \cos x}{3\cos^2 x - 2\sin x \cos x}$.

c) $C = \dfrac{2\sin^3 x + \sin^2 x \cos x + \cos^3 x}{3\cos x - 2\sin x \cos^2 x}$.

d) $D = \dfrac{2\sin x + \sin^2 x \cos x + \cos x}{3\cos x + 2\sin x \cos^2 x}$.

Bài 6. Cho $\tan x = \dfrac{1}{2}, x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{2\sin\dfrac{x}{2} + 3\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2} + 2\cos\dfrac{x}{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Bài 7. Cho $\sin x = \dfrac{2}{3}, x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Bài 8. Cho $\sin x = \dfrac{1}{3}, x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin 2x - \cos 2x$.

....

Phần 2. Phương trình lượng giác

I. Phương trình lượng giác cơ bản

A. Lý thuyết cần nhớ

1. Phương trình: $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in Z$

2. Phương trình: $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in Z$

3. Phương trình: $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow \alpha + k\pi, k \in Z$

4. Phương trình: $\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow \alpha + k\pi, k \in Z$

B. Bài tập rèn luyện

Bài 9. Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin(3x - 2) = 1,5$

c) $\sqrt{2}\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{5}\right) = 1$

d) $\cos(3x - 15^o) = \cos 150^o$

e) $\tan(2x + 3) = \tan\dfrac{\pi}{3}$

f) $\cot(45^o - x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\sin 3x - \cos 2x = 0$

h) $\sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos 3x$

i) $\sin\left(3x - \dfrac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

j) $\cos\dfrac{x}{2} = -\cos(2x - 30^o)$

k) $\cos 2x = \cos x$

l) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

m) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right) = 1$

n) $\sin\left(12x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

o) $\cos\left(6x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

p) $\cos(\pi - 5x) = -1$

q) $\tan(3\pi - 6x) = 1$

r) $\tan(x - 6\pi) = \sqrt{3}$

s) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

t) $\cot\left(\dfrac{5\pi}{6} + 12x\right) = \sqrt{3}$

u) $\cot\left(\dfrac{12\pi}{7} - 5x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

v) $\sin(12\pi - 3x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ w) $\cos(2x - a) = \sin 3x$ x) $\sin(3x - b) = \cos 5x$

y) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \cot\left(\dfrac{5\pi}{6} + x\right)$ z) $\cot(3\pi - x) = \tan\left(\dfrac{7\pi}{12} + 7x\right)$

Bài 10. Giải các phương trình sau trên khoảng đã cho :

a) $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$ với $0 < x < \pi$. b) $\cot 3x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ với $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$.

c) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ với $0 < x < 2\pi$. d) $2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$ với $-\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

Bài 11. Giải các phương trình sau :

a) $2\sin^2 x = 1$ c) $\sin x - 1 \quad 2\cos x - 1 \ = 0$

b) $2\cos 2x - \sqrt{3} \quad 2\cos x + 1 \ = 0$ d) $\tan x - 1 \quad \tan x - \sqrt{3} \ = 0$

e) $\cot x - 1 \quad \tan x + \sqrt{3} \ = 0$ f) $\cos 5x + 2\sin^2 x = 1$

Bài 12. Giải các phương trình sau :

a) $\sin x + \sin 3x + \cos x = 0$ c) $\sin 3x.\sin 2x = \sin 4x \sin x$

b) $\sin 5x + \sin x + 2\cos^2 x = 1$ d) $2\cos^4 x = 1 + 2\sin^4 x$

e) $\cos 2x + \sin x = \cos x$ f) $\sin x + 2\cos^2 2x = 1$

Bài 13. Giải các phương trình sau :

a) $4\sin x \cos x \cos 2x = 1$ c) $\sin 3x.\sin 2x = \sin 4x - \cos 2x \cos 3x$

b) $\sin 5x \cos x + \sin x \cos 5x + 2\cos^2 x = 1$ d) $1 + \cos 2x \ \sin x = \cos^2 x$

e) $4\cos 2x \sin x \cos x = \sin 8x$ f) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{5}{8}$

Bài 14. Giải các phương trình sau :

a) $4\sin^3 x + \cos 2x = 3\sin x$ c) $\sin 2x + 3\cos x = 4\cos^3 x$

b) $2\sin 2x \cos x = \sin 3x + 1$ d) $2\sin 3x \sin x = 1 - \cos 4x$

II. Phương trình bậc 2 đối với một hàm số lượng giác

A. Lý thuyết cần nhớ

Dạng 1: $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0(*)$, đặt: $t = \sin x, |t| \le 1$. Pt$(*)$ trở thành: $at^2 + bt + c = 0$.

Dạng 2: $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0(*)$, đặt: $t = \cos x, |t| \le 1$. Pt$(*)$ trở thành: $at^2 + bt + c = 0$.

Dạng 3: $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0(*)$, đặt: $t = \tan x$. Pt$(*)$ trở thành: $at^2 + bt + c = 0$.

Dạng 4: $a\cot^2 x + b\cot x + c = 0(*)$, đặt: $t = \cot x$. Pt$(*)$ trở thành: $at^2 + bt + c = 0$.

Phương trình bậc cao hơn theo một hàm số lượng giác ta làm tương tự.

❖ **Chú ý**: Các công thức lượng giác thường sử dụng trong dạng này là:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

3) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \dfrac{1}{4}\sin^2 2x$

4) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x.\cos^2 x$.

5) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

6) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

7) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

8) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

B. Bài tập mẫu:

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\cos 2x + 3\sin^2 x - 2 = 0 \quad (1)$

Phân tích: Thấy có 2x và góc x nên nghĩ đến công thức nhân đôi $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ đưa về phương trình bậc hai theo sin.

Giải

$(3) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3\sin^2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. , \ k \in Z \ .$$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \quad (2)$ **(CĐ Khối A,B,D – 2011)**

Phân tích:Trong bài toán có chứa góc x và 4x nên ta nghĩ đến việc đưa về cùng góc bằng công thức hạ bậc nâng cung của $\sin^2 x = \dfrac{1 - cos2x}{2}$. Vì khi sử dụng công thức hạ bậc nâng cung ta đã đưa về cos2x nên ta chọn công nhân đôi của $\cos 4x = 2cos^2 2x - 1$. Khi đó phương trình sẽ đưa về bậc hai theo cos2x.

Giải

$$(2) \Leftrightarrow 2cos^2 2x - 1 + 12.\frac{1 - cos2x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow cos^2 2x - 3cos2x + 2 = 0 \qquad *$$

Đặt $t = \cos 2x, |t| \le 1$. Pt $*$ trở thành: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1(n) \\ t = 2(l) \end{array}\right.$.

Với $t = 1$, ta có : $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, \ k \in Z$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0 \quad (3)$

Phân tích:Ta thấy $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$, chỉ cần sử dụng công thức nhân đôi của $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$. Khi đó phương trình (2) sẽ trở thành phương bậc hai theo cos2x.Khi đã quen rồi thì các Em có thể xem như phương trình bậc 2 theo ẩn là một hàm số lượng giác, không cần đặt t cho nhanh.

Giải

$$(3) \Leftrightarrow \ (cos^2 x - \sin^2 x)(cos^2 x + \sin^2 x) + 2cos^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. , \ k \in Z \ .$$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $2\cos 2x = 1 + \cos 3x \quad (4)$.

Phân tích:Khi gặp bài lượng giác đầu tiên ta đánh giá về hàm số lượng giác,các góc trong đó . Thử đưa về cùng hàm cùng góc nếu có thể. Bài bày ta thấy phương trình chỉ có chứa một hàm cos nên ta nghĩ đến việc đưa về cùng góc. Ta nhớ $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ và $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Khi đó sẽ được phương trình bậc 3 theo cos.

Giải

$(4) \Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 x - 1\right) = 1 + 4\cos^3 x - 3\cos x \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 4\cos^2 x - 3\cos x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{3}{2} (loai) \vee \cos x = 1$.

$\bullet \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in Z)$. $\bullet \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in Z)$.

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\cos x = \cos^2 \frac{3x}{4} \quad (5)$.

Phân tích:Trước tiên ta thử hạ bậc nâng cung $\cos^2 \frac{3x}{4} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{3x}{2}\right)$,tới đây ta sẽ thấy mối liên hệ giữa x và 3x/2. Không quen nhìn thì ta đặt t=x/2, khi đó phương trình sẽ có dạng $\cos 2t = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 3t\right)$. Khi đó giải như **Ví dụ 4**.

Giải

Đặt $t = \frac{x}{2}$, phương trình (5) trở thành: $\cos 2t = \cos^2 \frac{3t}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 t - 1 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 3t\right)$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 t - 2 = 1 + 4\cos t - 3\cos^3 t \Leftrightarrow 3\cos^3 t + 4\cos^2 t - 4\cos t - 3 = 0$. Các em tự giaỉ tiếp nhé!!

Ví dụ 6. Giải phương trình: $2 + 3\tan x - \sin 2x = 0 (6)$.

Phân tích: Khi gặp bài toán có chứa tan và cot ta nhớ đặt điều kiện và xem mối liên hệ giữa các góc trong bài toán. Bài này chưa tanx và sin2x nên ta nghĩ đến công thức $t = \tan x \Rightarrow \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$. Khi đó bài toán trở thành phương trình đa thức.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$. Đặt: $t = \tan x$ .Phương trình (6) trở thành:

$2 + 3t - \frac{2t}{1+t^2} = 0 \Leftrightarrow 3t^3 + 2t^2 + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t \Rightarrow \tan x \Rightarrow x...$!

Các Em tự giải tiếp nhé…!

Ví dụ 7. Giải phương trình: $2\sin^2 x + \tan^2 x = 2 \quad (7)$.

Phân tích: Bài này nếu đặt $t = \tan\frac{x}{2}$ đưa về phương trình đa thức theo t cũng được nhưng bậc khá cao. Ta thử nhớ công thức $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ và $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Khi đó bài toán đưa về phương trình trùng phương theo cos.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

Cách 1: $(7) \Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2 x\right)+\frac{1}{\cos^2 x}-1=2 \Leftrightarrow 2\cos^4 x-\cos^2 x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 x=-1(l)\\ \cos^2 x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},(k\in Z)..$

So với điều kiện ta có nghiệm của phương trình (7) là $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$.

Cách 2: $(7) \Leftrightarrow 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\cos^2 x+\tan^2 x=2 \Leftrightarrow 2\tan^2 x.\frac{1}{1+\tan^2 x}+\tan^2 x=2 \Leftrightarrow \tan^4 x+\tan^2 x-2=0$

$\Leftrightarrow \tan^2 x=1 \vee \tan^2 x=-2(l)....!$.

Ví dụ 8. Giải phương trình: $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{16}\cos^2 2x \quad (8)$.

Giải

Ta có:

$\sin^8 x+\cos^8 x=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2-2\sin^4 x.\cos^4 x=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x=1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x$.

Pt (8) $\Leftrightarrow 16\left(1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x\right)=17\left(1-\sin^2 2x\right) \Leftrightarrow 2\sin^4 2x+\sin^2 2x-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 2x=-1(loai)\\ \sin^2 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x=0 \Leftrightarrow \cos 4x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},(k\in Z.)$

Ví dụ 9. Giải phương trình: $\sin^8 x+\cos^8 x=2\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x\right)+\frac{5}{4}\cos 2x \quad (9)$.

Phân tích: Bài này ta để ý tí sẽ thấy bậc 8 và bậc 10 khi chuyển sang vế trái đặt ra làm nhân tử chung sẽ xuất hiện cos2x. Cụ thể:

$(9) \Leftrightarrow \sin^8 x-2\sin^{10} x+\cos^8 x-2\cos^{10} x=\frac{5}{4}\cos 2x \Leftrightarrow \sin^8 x\left(1-2\sin^2 x\right)+\cos^8 x\left(1-2\cos^2 x\right)=\frac{5}{4}\cos 2x$

Giải

$(9) \Leftrightarrow \sin^8 x-2\sin^{10} x+\cos^8 x-2\cos^{10} x=\frac{5}{4}\cos 2x \Leftrightarrow \sin^8 x\left(1-2\sin^2 x\right)+\cos^8 x\left(1-2\cos^2 x\right)=\frac{5}{4}\cos 2x$

$(9) \Leftrightarrow \sin^8 x\cos 2x-\cos^8 x\cos 2x=\frac{5}{4}\cos 2x \Leftrightarrow -\cos 2x\left(\cos^8 x-\sin^8 x\right)=\frac{5}{4}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)+\frac{5}{4}\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 4.\cos 2x.\cos 2x\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)+5\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x.\left[4\cos 2x.\left(1-\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 2x\right)\right)+5\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 2\cos^3 2x+2\cos 2x+5=0(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k.\frac{\pi}{2},(\mathrm{k}\in \mathrm{Z})$.

Ví dụ 10. Giải phương trình: $\cos 2x+\cos^2 x-\sin x+2=0 \quad (10)$.

Phân tích: Bài này khá dễ rồi nhỉ.! Ta chỉ cần đưa về phương trình bậc 2 theo sin như sau: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x; \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Giải

$$(10) \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow -3\sin^2 x + \sin x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{4}{3} (loai) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in Z)$.

C. Bài tập rèn luyện:

Bài 15.Giải các phương trình sau:

a) $\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$ b) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ c) $\cot^2 x - 4\cot x + 3 = 0$

d) $\tan^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\tan x - \sqrt{3} = 0$ e) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$ f) $\cos 2x + \sin x + 3 = 0$

Bài 16.Giải các phương trình sau:

a) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$ b) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$ c) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$

d) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ e) $6\sin^2 3x + \cos 12x = 14$ f) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$

g) $8\sin^2 x - \cos x = 5$

Bài 17.Giải các phương trình sau:

a) $\sin^3 x + 3\sin^2 x + 2\sin x = 0$ b) $\sin^2 2x - 2\cos^2 x + \frac{3}{4} = 0$ c) $5\sin 3x + \cos 6x + 2 = 0$

d) $2\cos 2x + \cos x = 1$ e) $4\sin^4 3x + 12\cos^2 3x - 7 = 0$ f) $5\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

Bài 18.Giải các phương trình sau:

a) $3(\tan x + \cot x) = 2.(2 + \sin x)$.

b) $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$.

c) $2\cos^2 \frac{6x}{5} + 1 - 3\cos \frac{8x}{5} = 0$.

d) $\sin \frac{5x}{2} = 5\cos^3 x.\sin \frac{x}{2}$.

e) $\frac{\sin x}{3} = \frac{\sin 5x}{5}$.

f) $\frac{\sin 5x}{5\sin x} = 1$.

g) $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + \sin x; \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Bài 19.Giải các phương trình sau:

a) $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

b) $2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$.

c) $\frac{\cos x\left(2\sin x + 3\sqrt{2}\right) - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$.

d) $\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2} - \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$.

e) $\cot x - \tan x + \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$.

f) $\sin 2x.(\cot x + \tan 2x) = 4\cos^2 x$.

g) $\tan^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$.

h) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$.

i) $\sin 2x(\cos x + 3) - 2\sqrt{3}\cos^3 x - 3\sqrt{3}\cos 2x + 8\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right) = 3\sqrt{3}$.

j) $4\left(\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)=7$.

k) $\tan^2 x-\tan x.\tan 3x=2$ (ĐHQG Hà Nội 1996).

l) $4\left(\sin 3x-\cos 2x\right)=5\left(\sin x-1\right)$

III. Phương trình bậc nhất theo sin và cos.

A. Lý thuyết cần nhớ

Dạng cơ bản : $a\sin x+b\cos x=c \quad (*)$.

Cách giải 1:

- Điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2+b^2\geq c$.
- Chia hai vế pt$(*)$ cho $\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$ ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

- Bấm máy(nếu góc có giá trị đẹp), trong trường hợp không đẹp cứ đặt:

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

- Phương trình trở thành: $\sin x.\cos\alpha+\sin\alpha.\cos x=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow \sin\ \ x+\alpha\ \ =\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

  Tới đây là dạng cơ bản !!!

Cách giải 2:

- Kiểm tra xem $\cos\dfrac{x}{2}=0\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi$ có phải là nghiệm không?? Nếu phải thì ta được một họ nghiệm này.
- $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0\Leftrightarrow x\neq \pi+k2\pi$, đặt: $t=\tan\dfrac{x}{2}\Rightarrow \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2};\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$. Khi đó phương trình $(*)$ trở thành : $b+c\ \ t^2-2at+c-b=0\Leftrightarrow t\Rightarrow \tan x\Rightarrow x...!$

Mở rộng 1 : $a\sin x+b\cos x=c\sin y$ hoặc $a\sin x+b\cos x=c\cos y$.
Mở rộng 2 : $a\sin x+b\cos x=c\sin y+d\cos y$.

Sử dụng cách giải 1 của dạng cơ bản đối với hai dạng mở rộng này.

Chú ý: Các công thức lượng giác thường sử dụng trong dạng này là:

1) $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a$

2) $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$

B. Bài tập mẫu:

Ví dụ 11. Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2 \quad (11)$.

Phân tích: Nếu thuộc kỉ công thức cộng em đưa vế trái về sin hay cos đều như nhau. Nếu quen sin đướng trước thì ta sắp xếp phương trình lại một tí…!

Giải

$$(11)\Leftrightarrow \sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=1\Leftrightarrow \sin 2x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x=1$$

$$(11)\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k2\pi,\left(k\in Z\right).$$

Ví dụ 12. Giải phương trình: $8\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}\quad (12)$.

Phân tích: Các em để ý không phải là luôn luôn nhưng khi thấy xuất hiện $\sqrt{3}$ thì thường là rơi vào dạng bậc nhất theo sin và cos hoặc mở rộng của nó.!!

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$.

$(12)\Leftrightarrow 8\sin^2 x.\cos x=\sqrt{3}\sin x+\cos x\Leftrightarrow 4\cos x(1-\cos 2x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow 3\cos x-4\cos 2x.\cos x=\sqrt{3}\sin x\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos 3x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos 3x\Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{3}\cos x-\sin\dfrac{\pi}{3}\sin x=\cos 3x$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\cos 3x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in Z).$

Ví dụ 13. Giải phương trình: $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x\quad (13)$.

Phân tích: Thấy $\sqrt{3}$ là ta thử nghĩ đên dạng bậc nhất theo sin và cos, nhưng bài khác góc và lệch bậc?? Để ý tý Em sẽ thấy công thức nhân 3 (sin thì 3-4). Ta thấy $\sin 9x=3\sin 3x-4\sin^3 3x$.

Giải

$(13)\Leftrightarrow \left(3\sin 3x-4\sin^3 x\right)-\sqrt{3}\cos 9x=1\Leftrightarrow \sin 9x-\sqrt{3}\cos 9x=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 9x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(9x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{9}\\ x=\dfrac{7\pi}{54}+\dfrac{k2\pi}{9}\end{array}\right.,(k\in Z).$

Ví dụ 14. Giải phương trình: $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos 3x\quad (14)$.

Phân tích: Đây là dạng **mở rộng 1**, em cứ giải tương tự như dạng cơ bản. Chia hai vế của phương trình cho 2 được:

$\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos 3x$ vì vế phải là hàm cos nên để cho tiện thì các em cũng đưa vế trái về hàm cos. Tức là: $\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos\dfrac{\pi}{3}.\cos x+\sin\dfrac{\pi}{3}.\sin x=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Giải

$(14)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos 3x\Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{3}.\cos x+\sin\dfrac{\pi}{3}.\sin x=\cos 3x\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$....!!

Các em tự giải tiếp nhé…!

Ví dụ 15. Giải phương trình: $\cos 3x-\sin 5x=\sqrt{3}\left(\cos 5x-\sin 3x\right)\quad (15)$.

Phân tích: Đây là dạng **mở rộng 2**. Đưa các giá trị lượng giác cùng góc đưa về một vế. là chuyển góc 3x về một vế và 5x về một vế. Tiếp theo Em cứ giải tương tự như dạng cơ bản .

Giải

$(15) \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = \sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x$

$\Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$….!!! Các em tự giải tiếp nhé…!

Ví dụ 16. Giải phương trình: $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2 \quad (16)$. **(ĐH- D-2007)**

Phân tích: Câu này khá cơ bản, thấy số $\sqrt{3}$ là khả năng phương trình bậc nhất theo sinx và cosx rồi. Chỉ cần khai triển hằng đẳng thức và đưa về đúng dạng thôi.

Giải

$(16) \Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., (k \in Z).$

Ví dụ 17. Giải phương trình: $4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \sqrt{3}\sin 4x = 2 \quad (17)$.

Phân tích: Nhớ lại $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$. Tới đây các Em thu gọn lại sẽ ra dạng cơ bản.

Giải

Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$.

$(17) \Leftrightarrow 4\left[1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)\right] + \sqrt{3}\sin 4x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 4x + \cos 4x = -2$

$\Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4}, (k \in Z).$

Ví dụ 18. Giải phương trình: $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{1}{2}\sin 4x \quad (18)$.

Phân tích: Câu rơi vào dạng đặt nhân tử chung rồi. Thầy sẽ nói kỉ phần sau.

Giải

$(18) \Leftrightarrow 2 - \sin 4x + 2\left(\sin^3 2x + \cos^3 2x\right) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sin 4x + 2(\sin 2x + \cos 2x)(1 - \sin 2x\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow 2 - \sin 4x + (\sin 2x + \cos 2x)(2 - 2\sin 2x\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sin 4x + (\sin 2x + \cos 2x)(2 - \sin 4x) = 0$

$\Leftrightarrow (2 - \sin 4x).(\sin 2x + \cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0 \\ 2 - \sin 4x = 0 (vn) \end{array}\right.$

$\sin 2x + \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., (k \in Z).$

Ví dụ 19. Giải phương trình: $\tan x-3\cot x=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\quad(19)$.

Phân tích: Bài toán có tan và cot các Em nhớ phải đặt điều kiện và sau khi giải xong phải kết hợp điều kiện. Gặp tan và cot suy nghĩ tự nhiên là ta cứ chuyển về cos và sin. Qui đồng đồng bỏ mẫu,khi bài toán không đúng dạng thì các thường các Em phải phát được nhân tử chung trước. Cái này cần rèn luyện.

Giải

$$(19)\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-3\frac{\cos x}{\sin x}=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\Leftrightarrow \sin^2 x-3\cos^2 x=4\sin x\cos x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)-2\sin 2x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x-2\sin 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\sqrt{3}\cos x=0(*)\\ \sin x-\sqrt{3}\cos x-2\sin 2x=0(**)\end{array}\right.$$

$$(*)\Leftrightarrow \tan x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in Z).$$

$$(**)\Leftrightarrow \sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin 2x\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{4\pi}{9}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in Z).$$

So với điều kiện ta có nghiệm của pt (19) là: $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi;x=\frac{4\pi}{9}+k2\pi,(k\in Z)$.

Ví dụ 20. Giải phương trình: $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x-\cos x\quad(20)$.

Giải

$$(20)\Leftrightarrow \sin x\left(\sin^2 x-1\right)+\cos^3 x+\cos x=0\Leftrightarrow -\sin x\cos^2 x+\cos^3 x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(-\sin x\cos x+\cos^2 x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0(*)\\ -\sin x\cos x+\cos^2 x+1(**)\end{array}\right.$$

$$(*)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in Z).$$

$$(**)\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}=-1\Leftrightarrow \sin 2x-\cos 2x=3(vn)$$

B. Bài tập rèn luyện:

Bài 20.Giải các phương trình sau:

a) $2\sin x-2\cos x=\sqrt{2}$ b) $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{2}$

c) $\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x=2$ d) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=-1$

e) $\sqrt{3}\cos 3x-\sin 3x-2=0$ f) $\cos 2x-2\sin 2x=3$

Bài 21.Giải các phương trình sau:

a) $2\sin 2x\cos 2x+\sqrt{3}\cos 4x=-\sqrt{2}$ b) $\sin 2x+\sin^2 x=\frac{1}{2}$

c) $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ d) $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$

e) $5\sin 2x-6\cos^2 x=13$ f) $2\sin 3x+\sin 2x=\sqrt{3}\cos 2x$

g) $\sin 3x+\sin 5x=\sqrt{3}\left(\cos 5x-\cos 3x\right)$ h) $\sqrt{3}\sin 4x-\cos 4x=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

i) $\sin 7x-\cos 6x=\sqrt{3}\left(\sin 6x+\cos 7x\right)$ j) $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=2\cos 3x$

Bài 22.Giải các phương trình sau:

a) $\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^4 x=\frac{1}{4}$ b) $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=3$

c) $2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos x=3+\cos 2x$ d) $\left(2\cos x-1\right)\left(\sin x+\cos x\right)=1$

e) $2\cos 2x=\sqrt{6}\left(\cos x-\sin x\right)$ f) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\frac{2}{\sin x+\sqrt{3}\cos x-1}$

g) $4\sin^3 x-1=3\sin x-\sqrt{3}\cos 3x$ h) $\sin x\cos 4x-\sqrt{3}\cos 5x=2-\sin 4x\cos x$

i) $4\sin 2x-3\cos 2x=3\left(4\sin x-1\right)$ j) $\frac{\cos x-\sin 2x}{2\cos^2 x-\sin x-1}=\sqrt{3}$

Bài 23.Giải các phương trình sau:

a) $\tan x-\sqrt{3}=\frac{1}{\cos x}$ b) $\sqrt{3}\sin 6x+4\cos^3 2x=1+3\cos 2x$

c) $\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x=\frac{5}{8}$ d) $4\sin 2x-3\cos 2x-5\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)=0$

e) $4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ f) $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x-\cos x+4=0$

g) $\left(\sin x+\cos x\right)^3-\sqrt{2}\left(1+\sin 2x\right)+\sin x+\cos x=\sqrt{2}$

IV. Phương trình đẳng cấp sin và cos

A. Lý thuyết cần nhớ

Dạng 1: $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d\ (1)$

Cách 1:Chia hai vế cho $\cos^2 x$ hoặc $\sin^2 x$.

Bước 1: Kiểm tra cosx = 0 phải là nghiệm của phương trình này không?? Nếu phải thì nhận nghiệm này.

Bước 2: Xét $\cos x\neq 0$. Chia cả 2 vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x$ ta được:

$$(1)\Leftrightarrow a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+b\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}+c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\cos^2 x=\frac{d}{\cos^2 x}\Leftrightarrow a\tan^2 x+b\tan x+c=d\left(1+\tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(a-d\right)\tan^2 x+b\tan x+c-d=0.$$

Dạng 2: $a\sin^3 x+b\sin^2 x\cos x+c\sin x\cos^2 x+d\cos^3 x=0\ (2)$
Dạng 3: $a\sin^4 x+b\sin^3 x\cos x+c\sin^2 x\cos^2 x+d\sin x\cos^3 x+e\cos^4 x=0\ (3)$

Cách giải: Chia hai vế của (2) cho $\cos^3 x$ hoặc $\sin^3 x$. Chia hai vế của (3) cho $\cos^4 x$ hoặc $\sin^4 x$ rồi làm như trên.

B. Bài tập mẫu:

Ví dụ 21. Giải phương trình: $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x \quad (21)$.

Giải

Cách 1:

TH1: Xét $\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x=\pm 1$. Khi đó phương trình (21) vô nghiệm.

TH2: Do $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in Z)$ không là nghiệm của phương trình (21) nên ta chia hai vế của phương trình (21) cho $\cos^2 x$ được:

$$(21)\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}-2\sqrt{3}\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{3}\tan x=1+\tan^2 x+\tan^2 x \Leftrightarrow 2\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,(k\in Z).$$

Cách 2:

$$(21)\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1 \Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=1 \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$$

Các Em tự giải tiếp nhé…!

Ví dụ 22. Giải phương trình: $\cos^3 x-4\sin^3 x-3\cos x\sin^2 x+\sin x=0 \quad (22)$.

Giải

TH1: Xét $\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x=\pm 1$. Khi đó phương trình (22) vô nghiệm.

TH2: Do $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in Z)$ không là nghiệm của phương trình (22) nên ta chia hai vế của phương trình (22) cho $\cos^3 x$ được:

$$(22)\Leftrightarrow \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}-4\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}-3\frac{\cos x\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^3 x}=0$$

$$\Leftrightarrow 1-4\tan^3 x-3\tan^2 x+\tan x\left(1+\tan^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x+3\tan^2 x-\tan x-1=0 \Leftrightarrow (\tan x+1)\left(\tan^2 x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.,(k\in Z).$$

Ví dụ 23. Giải phương trình: $3\cos^4 x-4\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x=0 \quad (23)$.

Giải

TH1: Xét $\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x=\pm 1$. Khi đó phương trình (23) vô nghiệm.

TH2: Do $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in Z)$ không là nghiệm của phương trình (23) nên ta chia hai vế của phương trình (23) cho $\cos^4 x$ được:

$$(23)\Leftrightarrow 3\frac{\cos^4 x}{\cos^4 x}-4\frac{\cos^2 x\sin^2 x}{\cos^4 x}+\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}=0$$

$$\Leftrightarrow \tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan^2 x = 1\\ \tan^2 x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = \pm 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right., k \in Z.$$

Ví dụ 24. Giải phương trình: $\sin 2x + 2\tan x = 3 \quad (24)$.

Giải

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in Z)$.

$$(24) \Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} + 2\tan x.\frac{1}{\cos^2 x} = 3.\frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\tan x + 2\tan x\left(1+\tan^2 x\right) = 3\left(1+\tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^3 x - 3\tan^2 x + 4\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in Z).$$

Ví dụ 25. Giải phương trình: $\sin x\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x \quad (25)$.

Giải

TH1: Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$. Khi đó phương trình (25) vô nghiệm.

TH2: Do $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in Z)$ không là nghiệm của phương trình (25) nên ta chia hai vế của phương trình (25) cho $\cos^3 x$ được:

$$(25) \Leftrightarrow \frac{2\sin x\sin x\cos x}{\cos^3 x} + \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\cos^3 x} = 6\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x}t - 4\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = 6 \Leftrightarrow 2\tan^2 x + 3\tan x\left(1+\tan^2 x\right) - 4\tan^3 x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x - 3\tan x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 2\\ \tan x = \pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = arc\tan 2 + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right., (k \in Z).$$

Ví dụ 26. Giải phương trình: $\sin 3x + \cos 3x + 2\cos x = 0 \quad (26)$.

Phân tích: Các Em nhớ lại $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Khi đó viết lại phương trình các Em sẽ phát hiện đây dạng đẳng cấp bậc 3. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$,nhưng nhớ phải xét $\cos x = 0$ trước.

Giải

$$(26) \Leftrightarrow \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) + \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - \cos x = 0 (*)$$

TH1: Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$. Khi đó phương trình $(*)$ vô nghiệm.

TH2: Do $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in Z)$ không là nghiệm của phương trình $(*)$ nên ta chia hai vế của phương trình $(*)$ cho $\cos^3 x$ được:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x} - 4\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + 4\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x} - \frac{\cos x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan x\left(1+\tan^2 x\right) - 4\tan^3 x + 4 - \left(1+\tan^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\tan^3 x-\tan^2 x+3\tan x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,(k\in Z).$$

Ví dụ 27. Giải phương trình: $\sin x+\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x=0 \quad (27)$.

Giải

TH1: Xét $\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x=\pm 1$. Khi đó phương trình (27) vô nghiệm.

TH2: Do $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in Z)$ không là nghiệm của phương trình (27) nên ta chia hai vế của phương trình (27) cho $\cos^3 x$ được:

$$(27)\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}-3\frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^3 x}=0 \Leftrightarrow \tan x\left(\tan^2 x+1\right)+1-3\tan^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x-3\tan^2 x+\tan x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\left(1\pm\sqrt{2}\right)+k\pi\end{array}\right.,(k\in Z).$$

Ví dụ 28. Giải phương trình:
$\cos^2(3\pi-2x)-\sqrt{3}\cos\left(4x-\dfrac{9\pi}{2}\right)=1+\sin^2(\pi-2x),\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};2\pi\right] \quad (28)$.

Giải

$(28)\Leftrightarrow \cos^2 2x-\sqrt{3}\sin 4x=1+\sin^2 2x(*)$

TH1: Xét $\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x=\pm 1$. Khi đó phương trình $(*)$ vô nghiệm.

TH2: Do $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in Z)$ không là nghiệm của phương trình $(*)$ nên ta chia hai vế của phương trình $(*)$ cho $\cos^2 2x$ được:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 2x}-2\sqrt{3}\frac{\sin 2x\cos 2x}{\cos^2 2x}=\frac{1}{\cos^2 2x}+\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2 2x+2\sqrt{3}\tan 2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan 2x=0\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.,(k\in Z).$$

C. Bài tập rèn luyện

Bài 24.Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x+2\cos^2 x=3\sin x\cos x$

b) $\sin^2 x-3\sin x\cos x=-1$

c) $2\sin^2 x+3\cos^2 x-\cos 2x-5\sin 2x=0$

d) $5\sin^2 2x-6\sin 4x-2\cos^2 2x=0$

e) $5\sin^2 x-5\sin 2x+4\cos^2 x=0$

f) $2\sin^2 3x-10\sin 6x-\cos^2 3x=-2$

g) $\sin^4 x-\cos^4 x-3\sin x\cos x=0$

Bài 25.Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\cos x}$

b) $\sin^2 x-3\cos^2 x+\sin 2x=2$

c) $\sin 3x+\cos 3x=\sin x-\cos x$

d) $\sin 3x=2\cos^3 x$

e) $\sin^2 x\left(\tan x+1\right)=3\sin x\left(\cos x-\sin x\right)+3$

f) $\sin x-4\sin^3 x+\cos x=0$

g) $\tan x\sin^2 x-2\sin^2 x=3\left(\cos 2x+\sin x.\cos x\right)$

h) $\sin 3x+\cos 3x+2\cos x=0$

i) $6\sin x-2\cos^3 x=\dfrac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$

j) $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{\tan x+1}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$

V. Phương trình dạng đối xứng:

A. Lý thuyết cần nhớ

Dạng 1: $a\left(\sin x+\cos x\right)+b\sin x\cos x+c=0$

<u>Cách giải</u>: Đặt $t=\sin x+\cos x,\left|t\right|\le\sqrt{2}\Rightarrow t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2\Rightarrow\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$ thay vào phương trình ta sẽ đưa về phương trình đa thức.

Dạng 2: $a\left(\sin x-\cos x\right)+b\sin x\cos x+c=0$

<u>Cách giải</u>: Đặt $t=\sin x-\cos x,\left|t\right|\le\sqrt{2}\Rightarrow t^2=\left(\sin x-\cos x\right)^2\Rightarrow\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$.

Dạng 3: $a\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+b\left(\tan x+\cot x\right)+c=0$

<u>Cách giải</u>: Điều kiện: $\sin 2x\ne 0$

Đặt $t=\tan x+\cot x,\left|t\right|\ge 2\Rightarrow t^2=\left(\tan x+\cot x\right)^2\Rightarrow\tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$.

Dạng 4: $a\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+b\left(\tan x-\cot x\right)+c=0$

<u>Cách giải</u>: Điều kiện: $\sin 2x\ne 0$

Đặt $t=\tan x-\cot x\Rightarrow t^2=\left(\tan x-\cot x\right)^2\Rightarrow\tan^2 x+\cot^2 x=t^2+2$.

Dạng 5: $a\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+b\sin 2x+c=0$

<u>Cách giải</u>: Đặt $t=\sin 2x,\left|t\right|\le 1\Rightarrow\sin^4 x+\cos^4 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x=1-\dfrac{1}{2}t^2$.

Dạng 6: $a\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+b\cos 2x+c=0$

<u>Cách giải</u>: Đặt $t=\cos 2x,\left|t\right|\le 1\Rightarrow\sin^4 x+\cos^4 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x=1-\dfrac{1}{2}\left(1-\cos^2 2x\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t^2$.

Dạng 7: $a\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)+b\sin 2x+c=0$

<u>Cách giải</u>: Đặt $t=\sin 2x,\left|t\right|\le 1\Rightarrow\sin^6 x+\cos^6 x=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=1-\dfrac{3}{4}t^2$.

Dạng 8: $a\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)+b\cos 2x+c=0$

<u>Cách giải</u>: Đặt $t=\cos 2x,\left|t\right|\le 1\Rightarrow\sin^6 x+\cos^6 x=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=1-\dfrac{3}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}t^2$.

Dạng 9: $a\sin^4 x+b\cos^4 x+c\cos 2x+d=0$

Cách giải: Đặt $t=\cos 2x, |t|\le 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1-t}{2} \\ \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1+t}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^4 x=\left(\dfrac{1-t}{2}\right)^2 \\ \cos^4 x=\left(\dfrac{1+t}{2}\right)^2 \end{cases}$.

Chú ý:*Dạng* ***5,6,7,8,9*** *thật ra có thể xem như là phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác nên các Em có thể xem lại mục II. Nên ở đây Thầy chỉ đưa ra ví dụ của dạng 1 và 2 thôi nhé!*

Bài tập mẫu:

Ví dụ 29. Giải phương trình: $\cos x+\sin x+3\sin x\cos x-1=0 \quad (29)$.

Giải

Đặt $t=\sin x+\cos x, |t|\le\sqrt{2}\Rightarrow t^2=(\sin x+\cos x)^2\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$. Phương trình (29) trở thành:

$$t+3.\frac{t^2-1}{2}-1=0\Leftrightarrow 3t^2+2t-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1(n) \\ t=-\dfrac{5}{3}(l) \end{array}\right.$$

Với Đặt $t=1$, ta có : $\sin x+\cos x=1$(Đây là phương trình bậc nhất theo sin cos đã biết. Các Em tự giải tiếp nhé..!)

Ví dụ 30. Giải phương trình: $\cos x-\sin x+6\sin x\cos x=1 \quad (30)$.

Giải

Đặt $t=\cos x-\sin x(*), |t|\le\sqrt{2}\Rightarrow t^2=(\cos x-\sin x)^2\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$. Phương trình (30) trở thành:

$$t+6.\frac{1-t^2}{2}=1\Leftrightarrow 3t^2-t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1(n) \\ t=-\dfrac{2}{3}(\text{n}) \end{array}\right.$$

Thay t trở ngược lại $(*)$ các Em tự giải tiếp nhé…!

Ví dụ 31. Giải phương trình: $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin 2x=-1 \quad (31)$.

Phân tích: Phương trình có vẻ chưa đúng dạng lắm. Thật ra các Em chỉ cần biến đổi ra về cùng góc là thấy đúng dạng ngay.

Giải

$$(31)\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}.\cos x-\sin\frac{\pi}{4}.\sin x\right)-2\sin x\cos x=-1\Leftrightarrow \cos x-\sin x-2\sin x\cos x+1=0(*)$$

Tới đây các Em làm tiếp pt $(*)$ như trên nhé….!

Ví dụ 32. Giải phương trình: $(1+\sin x)(1+\cos x)=2 \quad (32)$.

Phân tích: Các Em để ý này đã cùng góc rồi do vậy nhân phân phối và và thu gọn thôi…!

Giải

$$(32)\Leftrightarrow \sin x+\cos x+\sin x\cos x+1=2\Leftrightarrow \sin x+\cos x+\sin x\cos x-1=0(*)$$

Tới đây các Em làm tiếp pt $(*)$ như trên nhé….!

Ví dụ 33. Giải phương trình: $\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0 \quad (33)$.

Giải

$(33) \Leftrightarrow \sin x+\sin^2 x+\cos x\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \sin x(1+\sin x)+\cos x(1-\sin^2 x)=0$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)(\sin x+\cos x(1-\sin x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1(*)\\ \sin x+\cos x-\sin x\cos x=0(**)\end{array}\right.$

Các Em giải tiếp lần lượt từng phương trình riêng để thuận lợi nhé…!

C. Bài tập rèn luyện

Bài 26.Giải các phương trình sau:

a) $3(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x+3=0$

b) $\sin x+\cos x-4\sin x\cos x+4=0$

c) $4\sin x\cos x-2(\sin x+\cos x)+1=0$

d) $2\sin 2x-3\sqrt{6}(\sin x+\cos x)+8=0$

Bài 27.Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-5=0$

b) $\sin x-\cos x+7\sin 2x=1$

c) $\sin 3x-\cos 3x+2(\sin x+\cos x)=1$

d) $1+\sin^3 x+\cos^3 x-3\sin x\cos x=0$

e) $2\sin^3 x-\sin x=2\cos^3 x-\cos x+\cos 2x$

f) $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)$

g) $\sin^3 x+\cos^3 x=\cos 2x$

h) $2\sin x+\cot x=2\sin 2x+1$

i) $1+\cos^3 x-\sin^3 x=\sin x$

j) $\cot x-\tan x=\sin x+\cos x$

VI. Đưa về phương trình tích:

1) Nhóm các góc phù hợp áp dụng công thức biến tổng thành tích hoặc biến tổng thành tích

Ví dụ 34. Giải phương trình: $\sin 5x+\cos 2x+\sin x=0 \quad (34)$.

Phân tích: Các Em để ý góc (5x-x):2=2x nên ta sẽ nhóm sin5x và sinx lại sữ dụng công thức biến tổng thành tích.

Giải

$(34) \Leftrightarrow (\sin 5x+\sin x)+\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\sin 4x\cos 2x+\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\sin 4x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 2\sin 4x+1=0\end{array}\right.$

Các Em giải tiếp lần lượt từng phương trình riêng cho dễ nhé…!

Ví dụ 35. Giải phương trình: $\cos 3x+\cos x=\sin 4x \quad (35)$.

Phân tích: Các Em để ý cos3x + cosx có chưa cos2x và sin4x Em sử dụng công thức nhân đôi cũng có chứa cos2x nên ta sẽ có nhân chung là cos2x.

Giải

$(35) \Leftrightarrow (\cos 3x+\cos x)=2\sin 2x\cos 2x \Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x-2\sin 2x\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos x-\sin 2x=0\end{array}\right.$

Các Em giải tiếp lần lượt từng phương trình riêng cho dễ nhé…!

Ví dụ 36. Giải phương trình: $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0 \quad (36)$.

Phân tích: Các Em để ý góc $\frac{3x-x}{2}=\frac{4x-2x}{2}$ nên ta nghĩ đến việc nhóm $(\cos 3x+\cos x)$ và $(\cos 4x+\cos 2x)$ để biến đổi thành tích.

Giải

$(36)\Leftrightarrow(\cos 3x+\cos x)+(\cos 4x+\cos x)=0\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x+2\cos 3x\cos x=0\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 2x+\cos 3x)=$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 2x+\cos 3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos 3x=-\cos 2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos 3x=\cos(\pi-x)(*)\end{array}\right.$$

Các Em giải tiếp $(*)$ nhé…!

Ví dụ 37. Giải phương trình: $\sin x+\sin 3x+\cos 3x+\cos x=0\quad(37)$.

Giải

$(37)\Leftrightarrow(\sin 3x+\sin x)+(\cos 3x+\cos x)=0\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+2\cos 2x\cos x=0\Leftrightarrow 2\cos x(\sin 2x+\cos 2x)=$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 2x+\cos 2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos 2x=-\sin 2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)(*)\end{array}\right.$$

Các Em giải tiếp $(*)$ nhé…!

Ví dụ 38. Giải phương trình: $\sin^2 x+\sin^2 3x=\cos^2 2x+\cos^2 4x\quad(38)$.

Phân tích: Trong phương trình có bậc hai,rất tự nhiên ta thử hạ bậc nâng cung xem.
$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2};\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2};\cos^2 4x=\frac{1+\cos 8x}{2}$. Khi đó các hằng số tự đã triệt tiêu đưa về cùng một vế ta sẽ thấy tương tự các bài ở trên.

Giải

$$(38)\Leftrightarrow\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}\Leftrightarrow\cos 8x+\cos 2x+\cos 6x+\cos 4x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 5x\cos 3x+2\cos 5x\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 5x=0\\ \cos 3x+\cos x=0\end{array}\right.$$

Các Em giải tiếp nhé…!

Ví dụ 39. Giải phương trình: $\sin^2 2x+\sin^2 4x=\sin^2 6x\quad(39)$.

Phân tích: Trong phương trình này ta không sử dụng công thức hạ bậc nâng hết vì như thế sẽ còn thừa số tự do và không đặt nhân tử chung được. Nên ta chỉ sử dụng công thức hạ bậc nâng cho
$\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2};\sin^2 6x=\frac{1-\cos 12x}{2}$. Vì sao lại là $\sin^2 2x;\sin^2 6x$??? AK…! Vì góc $\frac{12x-4x}{2}=4x$
Hoặc Em cũng có thể kết hợp $\sin^2 4x;\sin^2 6x$.

Giải

$(39) \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 4x}{2} + \sin^2 4x = \dfrac{1-\cos 12x}{2} \Leftrightarrow \cos 12x - \cos 4x + \sin^2 4x = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin 4x \sin 8x + \sin^2 4x = 0 \Leftrightarrow -4\sin^2 4x \cos 4x + \sin^2 4x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 4x = 0 \\ -4\cos 4x + 1 = 0 \end{array}\right.$

Các Em giải tiếp nhé…!

Ví dụ 40. Giải phương trình: $2\sin 3x \cos 2x = \sin 5x \quad (40)$.

Phân tích: Em để ý $2x+3x=5x$ nên ta biến đổi tích thành tổng.

$2\sin 3x \cos 2x = 2.\dfrac{1}{2}(\sin 5x + \cos x) = \sin 5x + \cos x$.

Giải

$(40) \Leftrightarrow 2.\dfrac{1}{2}(\sin 5x + \cos x) = \sin 5x \Leftrightarrow \cos x = 0$

Các Em giải tiếp nhé…!

2) Nhóm nhân tử chung kết hợp sử dụng phân tích tam thức bậc hai

Cần nhớ: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$,trong đó x_1, x_2 là nghiệm của $f(x)=0$.

Minh họa:

a) $f(x) = 2x^2 + x - 3 = 2(x-1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right) = (x-1)(2x+3)$.

b) $f(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 3 = 2(\sin x - 1)\left(\sin x + \dfrac{3}{2}\right) = (\sin x - 1)(2\sin x + 3)$

Ví dụ 41. Giải phương trình: $\sin 2x + 3\cos x + 2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0 \quad (41)$.

Giải

$(41) \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 3\cos x + (2\sin^2 x + \sin x - 3) = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x + 3) + (\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 3)(\cos x + \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x + 3 = 0 \\ \cos x + \sin x - 1 = 0 \end{array}\right.$

Các Em giải tiếp nhé…!

Bình luận: Trong bài giải ở trên tại sao khi khai triển $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ta lại biết kết hợp với 3cosx??? Mà không phải là 2sinx.cosx với sinx??? Vì biểu thức còn lại là $2\sin^2 x + \sin x - 3$ ta có thể phân tích được thành nhân tử! Thật ra khi gặp dạng này Em cứ thử kết hợp sin2x với cos thử và kết hợp với sinx thử và xem biểu thức còn lại có phân tích được thành nhân tử không!!

Ví dụ 42. Giải phương trình: $\sin 2x - 7\cos x + 2\cos^2 x - \sin x + 3 = 0 \quad (42)$.

Phân tích:

Hướng Thứ 1:Kết hợp $\sin 2x - 7\cos x = 2\sin x\cos x - 7\cos x = \cos x(2\sin x - 7)$. Khi đó biểu thức còn lại Em phải viết thành bậc 2 theo sinx để phân tích thành nhân tử:

$2\cos^2 x - \sin x + 3 = 2(1-\sin^2 x) - \sin x + 3 = -2\sin^2 x - \sin x + 5$

$$= -2\left(\sin x - \frac{-1+\sqrt{41}}{2}\right)\left(\sin x - \frac{-1-\sqrt{41}}{2}\right)$$

Kết hợp vậy không được rồi phải đổi thôi…!

Hướng Thứ 2:Kết hợp $\sin 2x - \sin x = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x\left(2\cos x - 1\right)$. Khi đó biểu thức còn lại Em phải viết thành bậc 2 theo cosx để phân tích thành nhân tử:

$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 2\left(\cos x - 3\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = \left(\cos x - 3\right)\left(2\cos x - 1\right)$**.** Vậy có nhân tử chung rồi nhé$\left(2\cos x - 1\right)$…! Vậy chọn **hướng thứ 2** nhé…!

Giải

$\left(42\right) \Leftrightarrow \sin 2x - \sin x + 2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x + \left(2\cos x - 1\right)\left(\cos x - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x - 1\right) + \left(2\cos x - 1\right)\left(\cos x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left(2\cos x - 1\right)\left(\sin x + \cos x - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0 \\ \sin x + \cos x - 3 = 0 (vn) \end{array}\right.$

Các Em giải tiếp nhé…!

Ví dụ 43. Giải phương trình: $\sin 2x + \cos 2x - 3\sin x - 5\cos x + 4 = 0 \quad \left(43\right)$.

Phân tích: $\sin 2x = 2\sin x\cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Hướng Thứ 1: Nếu kết hợp $\sin 2x - 5\cos x = 2\sin x\cos x - 5\cos x = \cos x\left(2\sin x - 5\right)$. Khi đó biểu thức còn lại Em phải viết thành bậc 2 theo sinx để phân tích thành nhân tử, tức là Em phải chọn $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

$$\cos 2x - 3\sin x + 4 = 1 - 2\sin^2 x - 3\sin x + 4 = -2\sin^2 x - 3\sin x + 5$$
$$= -2\left(\sin x - 1\right)\left(\sin x + \frac{5}{2}\right) = \left(-\sin x + 1\right)\left(2\sin x + 5\right)$$

Thế này thì không có nhân tử chung rồi, phải đổi hướng khác thôi…!

Hướng Thứ 2: Nếu kết hợp $\sin 2x - 3\sin x = 2\sin x\cos x - 3\sin x = \sin x\left(2\cos x - 3\right)$. Khi đó biểu thức còn lại Em phải viết thành bậc 2 theo cosx để phân tích thành nhân tử, tức là Em phải chọn $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

$$\cos 2x - 5\cos x + 4 = 2\cos^2 x - 1 - 5\cos x + 4 = 2\cos^2 x - 5\cos x + 3$$
$$= 2\left(\cos x - 1\right)\left(\cos x - \frac{3}{2}\right) = \left(\cos x - 1\right)\left(2\cos x - 3\right)$$

Vậy có nhân tử chung rồi nhé$\left(2\cos x - 3\right)$…! Vậy chọn **hướng thứ 2** nhé…!

Giải

$\left(43\right) \Leftrightarrow \left(\sin 2x - 3\sin x\right) + \left(2\cos^2 x - 1 - 5\cos x + 4\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x - 3\right) + \left(\cos x - 1\right)\left(2\cos x - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 3 = 0 (vn) \\ \sin x + \cos x - 1 = 0 \end{array}\right.$

Các Em giải tiếp nhé…!

Bình luận: Ta có thể tổng quát dạng này như sau:

Dạng: $a\sin 2x + b\cos 2x + c\sin x + d\cos x + e = 0$

Cách giải:

Hướng Thứ 1: Nếu kết hợp $a\sin 2x + d\cos x = 2a\sin x\cos x + d\cos x = \cos x\left(2a\sin x + d\right)$. Khi đó biểu thức còn lại Em phải viết thành bậc 2 theo sinx để phân tích thành nhân tử, tức là Em phải chọn $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

$b\cos 2x + c\sin x + e = b\left(1-2\sin^2 x\right) + c\sin x + e = -2b\sin^2 x + c\sin x + e + b$. Tiếp theo Em phân tích xem có nhân tử chung không!!!

Hướng Thứ 2: Nếu kết hợp $a\sin 2x + c\sin x = 2a\sin x\cos x + c\sin x = \sin x\left(2a\cos x + c\right)$. Khi đó biểu thức còn lại Em phải viết thành bậc 2 theo sinx để phân tích thành nhân tử, tức là Em phải chọn $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

$b\cos 2x + d\cos x + e = b\left(2\cos^2 x - 1\right) + d\cos x + e = 2b\sin^2 x + d\cos x + e - b = 0$. Tiếp theo Em phân tích xem có nhân tử chung không!!!

Hai hướng trên nếu có nhân tử chung thì chỉ có thể là $\left(2a\sin x + d\right)$ hoặc $\left(2a\cos x + c\right)$.

Ví dụ 44. Giải phương trình: $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0 \quad (44)$ **(ĐH-Khối D-2009)**

Phân tích:

Hướng Thứ 1: Thử kết hợp $\sin 2x - \cos x = 2\sin x\cos x - \cos x = \cos x\left(2\sin x - 1\right)$. Khi đó biểu thức còn lại Em phải viết thành bậc 2 theo sinx để phân tích thành nhân tử, tức là Em phải chọn $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

$$-\cos 2x + 3\sin x - 1 = -\left(1-2\sin^2 x\right) + 3\sin x - 1 = 2\sin^2 x + 3\sin x - 2$$
$$= \left(\sin x + 2\right)\left(2\sin x - 1\right)$$

Vậy có nhân tử chung rồi nhé $\left(2\sin x - 1\right)$ …! Vậy chọn **hướng thứ 1** nhé…!

Giải

$$(44) \Leftrightarrow \left(\sin 2x - \cos x\right) - \left(1 - 2\sin^2 x\right) + 3\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x - 1\right) + \left(2\sin x - 1\right)\left(\sin x + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = 0 \\ \sin x + \cos x + 2 = 0 (vn) \end{array}\right.$$

Các Em giải tiếp nhé…!

Ví dụ 45. Giải phương trình: $\left(2\cos x - 1\right)\left(2\sin x + \cos x\right) = \sin 2x - \sin x \quad (45)$ **(ĐH-Khối D-2004)**

Phân tích: Đừng vội biến đổi vế trái vì đã là tích của hai biểu thức rồi. Thử biến đổi vế phải: $\sin 2x - \sin x = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x\left(2\cos x - 1\right)$. Tới đây ta thấy nhân tử chung là $2\cos x - 1$.

Giải

$$(45) \Leftrightarrow \left(2\cos x - 1\right)\left(2\sin x + \cos x\right) = 2\sin x\cos x - \sin x \Leftrightarrow \left(2\cos x - 1\right)\left(2\sin x + \cos x\right) = \sin x\left(2\cos x - 1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(2\cos x - 1\right)\left(\sin x + \cos x\right) = 0$$

Các Em giải tiếp nhé…!

3) Một số biểu thức có nhân tử chung thường gặp:

Nhóm các biểu thức thường gặp	Nhân tử chung
$1+\sin 2x; \cos 2x; 1+\tan x; 1+\cot x; \tan x - \cot x; \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right); \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin x + \cos x$
$1-\sin 2x; \cos 2x; 1-\tan x; 1-\cot x; \tan x - \cot x; \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right); \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin x - \cos x$
$\sin 2x; 1-\cos 2x; \tan x; \tan 2x; \cos 3x - \cos x$	$\sin x$
$1-\cos^2 x; \sin^2 x; \sin^3 x; 1\pm\cos^3 x; \cos 2x \pm \cos x$	$\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)$

$1-\sin^2 x;\cos^2 x;\cos^3 x;1\pm\sin^3 x;\cos 2x\pm\sin x$	$(1-\sin x)(1+\sin x)$

Ví dụ 46. Giải phương trình: $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0 \quad (46)$ **(ĐH-Khối B-2005)**

Phân tích:

Cách 1 : $\sin x+\cos x;1+\sin 2x;\cos 2x$ có nhân tử chung $\sin x+\cos x$. Thật ra thì các Em cũng không cần quá lo lắng vì Bảng trên qua nhiều không nhớ. Khi làm quen rồi thì các Em cũng không cần phải nhớ…!

Cách 2 : Em cứ xem đây là dạng $a\sin 2x+b\cos 2x+c\sin x+d\cos x+e=0$,khi đó nhân tử chung có thể là $(2\cos x+1)$hoặc $(2\sin x+1)$ giải như trên.

Giải

$(46)\Leftrightarrow(1+\sin 2x)+(\sin x+\cos x)+\cos^2 x-\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)^2+(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)=0$

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(2\cos x+1)=0$

Các Em giải tiếp nhé…!

Ví dụ 47. Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1 \quad (47)$ **(ĐH-Khối A-2012)**

Phân tích:

Cách 1 : $\sqrt{3}\sin 2x;\cos 2x+1;\cos x$ có nhân tử chung $\cos x$.

Cách 2 : Em cứ xem đây là dạng $a\sin 2x+b\cos 2x+c\sin x+d\cos x+e=0$,khi đó nhân tử chung có thể là $\cos x$hoặc $\left(2\sqrt{3}\sin x-1\right)$ và giải như trên.

Giải

$(47)\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+(1+\cos 2x)-2\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-2\cos x=0\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sqrt{3}\sin x+\cos x-1=0\end{array}\right.$

Các Em giải tiếp nhé…!

Ví dụ 48. Giải phương trình: $\sin x+2\cos x+2\tan x+4\cot x+6=0 \quad (48)$

Giải

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$.

$(48)\Leftrightarrow(\sin x+2\cos x)+2(\tan x+2)+2(2\cot x+1)=0$

$\Leftrightarrow(\sin x+2\cos x)+2\left(\dfrac{\sin x+2\cos x}{\cos x}\right)+2\left(\dfrac{\sin x+2\cos x}{\sin x}\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+2\cos x=0\\ 1+\dfrac{2}{\cos x}+\dfrac{2}{\sin x}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-2\\ 2(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x=0\end{array}\right.$

Các Em giải tiếp nhé…!

Ví dụ 49. Giải phương trình: $\sin x+2\cos^3 x+\cos 2x=0 \quad (49)$

Giải

$(49) \Leftrightarrow \sin x + 2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x(1+\cos x) - (1-\sin x) = 0 \Leftrightarrow 2(1-\sin^2 x)(1+\cos x) - (1-\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)\left[2(1+\sin x)(1+\cos x) - 1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ 2(\sin x+\cos x) + 2\sin x\cos x + 1 = 0\end{array}\right.$

Các Em giải tiếp nhé…!

Ví dụ 50. Giải phương trình: $\dfrac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin x + \cos x - 1} = 1 \quad (50)$

Giải

Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 1$

$(50) \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x - 1$

$\Leftrightarrow 1 + \sin 2x + \cos^2 x - \sin^2 x - (\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - 1) = 0$

Các Em giải tiếp nhé…!

C.Bài tập rèn luyện

Bài 28.Giải các phương trình sau:

a) $\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0$

b) $\cos x - \cos 2x - \sin 3x = 0$

c) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$

d) $\sin(2x - 4\pi) + \sin(\pi - 3x) = \sin x$

e) $\sin 6x - \sin 2x = \cos 4x$

f) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

g) $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$

h) $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = \cos 2x + \cos 3x + \cos 6x$

Bài 29.Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x\cos 2x = \sin 4x\cos x$

b) $\cos x\cos 2x = \cos 4x\cos 3x$

c) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$

d) $\cos 2x.\tan 3x = \sin 4x$

e) $\sin 4x\sin 2x + \sin 9x\sin 3x = \cos^2 x$

f) $\sin 2x\sin 3x + \sin 5x\sin 10x = 0$

g) $\sin x\sin 3x + \sin 4x\sin 8x = 0$

h) $\sin 3x\cos 2x + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} + \sin x\cos 6x = 0$

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} + \sin 2x\cos 7x = 0$

j) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x\cos 2x\cos 3x + 2$

Bài 30.Giải các phương trình sau:

a) $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$

b) $(2\sin x - 1)(\sin x + 2\cos x) = \sin 2x - \cos x$

c) $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

d) $\sqrt{3}(2\cos^2 x + \cos x - 2) + (3 - 2\cos x)\sin x = 0$

e) $\cos 2x + \cos x = \sin x - \sin 2x$

f) $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

g) $\sin 2x + \cos 2x = 1 + \sin x - 3\cos x$

h) $\sin 2x + \cos 2x - 2(\sin x - \cos x) - 3 = 0$

i) $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$ **(ĐH-Ngoại Thương)**

j) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x$

k) $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

l) $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) - 1 = 0$

VII. Bài tập tổng hợp

Bài 31.Giải các phương trình sau:

a) $\cos^3 x+\cos^2 x+2\sin x-2=0$

b) $\tan x\sin^2 x-2\sin^2 x=3\left(\cos 2x+\sin x\cos x\right)$

c) $\sin x-4\sin^3 x+\cos x=0$

d) $2\sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=1+2\cos x$

e) $2\sin x+\cot x=2\sin 2x+1$

f) $2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x$

g) $\frac{1}{\tan x+\cot 2x}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos x-\sin x\right)}{\cot x-1}$

h) $8\sin^3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x$

i) $2\cos 5x\cos 3x+\sin x=\cos 8x$

j) $2\sin^2 x-\sin 2x+\sin x+\cos x-1=0$

k) $2\cos 6x+2\cos 4x-\sqrt{3}\cos 2x=\sin 2x+\sqrt{3}$

l) $2\cos 3x\cos x+\sqrt{3}\left(1+\sin 2x\right)=2\sqrt{2}\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Bài 32.Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x-2\tan 4x+\tan 5x=0$

b) $\sin 2x+\left(1+\cos 3x\right)\sin x-2\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

c) $\left(1+\sin x\right)^2\cos x=1+\sin x+\cos x$

d) $\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$

e) $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0$

f) $\cos 3x\cos x=1$

g) $\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$

h) $\cos 3x+\sin 6x-\cos 9x=0$

i) $\cos x+\sin 2x=\sin x+\sin 2x\cot x$

j) $\sin 4x+2\sin^3 x=\sin x+\sqrt{3}\cos x\cos 2x$

Bài 33. Giải các phương trình sau:

a) $4\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin 3x$

b) $\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0$

c) $\sin 2x+2\sin^2 x=\sin x+\cos x$

d) $\sin^2 x\left(\tan x+1\right)=3\sin x\left(\cos x-\sin x\right)+3$

e) $\cos x-\cos 2x+\sin x=0$

f) $4\sin x+\cos x=2+\sin 2x$

g) $\cos 2x+\left(1+2\cos x\right)\left(\cos x-\sin x\right)=0$

h) $\sqrt{2}\sin 2x-\sqrt{6}\cos x-2\sin x+\sqrt{3}=0$

i) $\sqrt{3}\sin 2x+2\cos 2x-\cos 4x-1=0$

j) $\sin 2x\left(2\cos x-5\right)+\cos 2x+4\sin x-5\cos x+3=0$

....

Phần 3.Đề Thi Đại Học Cao Đẳng Qua Các Năm

Bài 34. (ĐH Khối A - 2002) Tìm nghiệm thuộc khoảng $\left(0;2\pi\right)$ của phương trình:

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+\sin 2x}\right)=2\cos 2x+3$$

Bài 35. (ĐH Khối B - 2002) Giải phương trình: $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$

Bài 36. (ĐH Khối D - 2002) Giải phương trình: $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$

Bài 37. (Dự bị 1 -Khối A - 2002) Cho phương trình: $\frac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}=a$ (a là tham số)

a)Giải phương trình khi $a=\frac{1}{3}$.

b) Tìm a để phương trình có nghiệm.

Bài 38. (Db 2 -Khối A - 2002) Giải phương trình: $\tan x+\cos x-\cos^2 x=\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)$

Bài 39. (Db 1 -Khối B- 2002) Giải phương trình: $\tan^4 x+1=\frac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$

Bài 40. (Db 2 -Khối B - 2002) Giải phương trình: $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{1}{8\sin 2x}$

Bài 41. (Db 1 -Khối D - 2002) Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1}{8\cos^2 x}}=\sin x$

Bài 42. (Db 2 -Khối D - 2002) Tìm m để phương trình:

$2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\cos 4x+2\sin 2x-m=0(*)$

Có ít nhất một nghiệm thuộc $[0;2\pi]$.

Bài 43. (ĐH Khối A - 2003) Giải phương trình: $\cot x-1=\frac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x$

Bài 44. (ĐH Khối B - 2003) Giải phương trình: $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$

Bài 45. (ĐH Khối D - 2003) Giải phương trình: $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\frac{x}{2}=0$

Bài 46. (Db 1-Khối A - 2003) Giải phương trình: $\cos 2x+\cos x\left(2\tan^2 x-1\right)=2$

Bài 47. (Db 2-Khối A - 2003) Giải phương trình: $3-\tan x\left(\tan x+2\sin x\right)+6\cos x=0$

Bài 48. (Db 1-Khối B - 2003) Giải phương trình: $3\cos 4x-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$

Bài 49. (Db 2-Khối B - 2003) Giải phương trình: $\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\cos x-2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x-1}=1$

Bài 50. (Db 1-Khối D - 2003) Giải phương trình: $\frac{\cos^2 x\left(\cos x-1\right)}{\sin x+\cos x}=2\left(1+\sin x\right)$

Bài 51. (Db 2-Khối D - 2003) Giải phương trình: $\cot x=\tan x+\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

Bài 52. (ĐH Khối B - 2004) Giải phương trình: $5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\tan^2 x$

Bài 53. (ĐH Khối D - 2004) Giải phương trình: $\left(2\cos x-1\right)\left(2\sin x+\cos x\right)=\sin 2x-\sin x$

Bài 54. (Db 1-Khối A - 2004) Giải phương trình: $4\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)=\cos x+3\sin x$

Bài 55. (Db2-Khối A - 2004) Giải phương trình: $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x}=1$

Bài 56. (Db1-Khối B - 2004) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\cos x}$

Bài 57. (Db2-Khối B - 2004) Giải phương trình: $\sin 4x\sin 7x=\cos 3x\cos 6x$

Bài 58. (Db1-Khối D - 2004) Giải phương trình: $2\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x=\sin 4x\cos x$

Bài 59. (Db2-Khối D - 2004) Giải phương trình: $\sin x+\sin 2x=\sqrt{3}\left(\cos x+\cos 2x\right)$

Bài 60. (ĐH Khối A - 2005) Giải phương trình: $\cos^2 3x\cos 2x-\cos 2x=0$

Bài 61. (ĐH Khối B- 2005) Giải phương trình: $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$

Bài 62. (ĐH Khối D- 2005) Giải phương trình: $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$

Bài 63. (Db1-Khối A - 2005) Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình:

$$4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Bài 64. (Db2-Khối A - 2005) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\cos x-\sin x=0$

Bài 65. (Db1-KhốiB - 2005) Giải phương trình: $\sin x\cos 2x+\cos^2 x\left(\tan^2 x-1\right)+2\sin^3 x=0$

Bài 66. (Db2-KhốiB - 2005) Giải phương trình: $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3\tan^2 x=\frac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}$

Bài 67. (Db1-KhốiD - 2005) Giải phương trình: $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$

Bài 68. (Db2-KhốiD - 2005) Giải phương trình: $\sin 2x+\cos 2x+3\sin x-\cos x-2=0$

Bài 69. (ĐH Khối A - 2006) Giải phương trình: $\frac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$

Bài 70. (ĐH Khối B - 2006) Giải phương trình: $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)=4$

Bài 71. (ĐH Khối D - 2006) Giải phương trình: $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$

Bài 72. (Db1-Khối A - 2006) Giải phương trình: $\cos 3x\cos^3 x-\sin 3x\sin^3 x=\frac{2+3\sqrt{2}}{8}$

Bài 73. (Db2-Khối A - 2006) Giải phương trình: $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+4\sin x+1=0$

Bài 74. (Db1-Khối B - 2006) Giải phương trình: $\left(2\sin^2 x-1\right)\tan^2 2x+3\left(2\cos^2 x-1\right)=0$

Bài 75. (Db2-Khối B - 2006) Giải phương trình: $\cos 2x+\left(1+2\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)=0$

Bài 76. (Db1-Khối D - 2006) Giải phương trình: $\cos^3 x+\sin^3 x+2\sin^2 x=1$

Bài 76. (Db2-Khối D - 2006) Giải phương trình: $4\sin^3 x+4\sin^2 x+3\sin 2x+6\cos x=0$

Bài 78. (ĐH Khối A - 2007) Giải phương trình: $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x$

Bài 79. (ĐH Khối B - 2007) Giải phương trình: $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$

Bài 80. (ĐH Khối D - 2007) Giải phương trình: $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$

Bài 81. (Db1-Khối A - 2007) Giải phương trình: $\sin 2x+\sin x-\frac{1}{2\sin x}-\frac{1}{\sin 2x}=2\cot 2x$

Bài 82. (Db2-Khối A - 2007) Giải phương trình: $2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+1=3\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$

Bài 83. (Db1-Khối B - 2007) Giải phương trình: $\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{3x}{2}$

Bài 84. (Db2-Khối B - 2007) Giải phương trình: $\frac{\sin 2x}{\cos x}+\frac{\cos 2x}{\sin x}=\tan x-\cot x$

Bài 85. (Db1-Khối D - 2007) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\cos x=1$

Bài 86. (Db2-Khối D - 2007) Giải phương trình: $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$

Bài 87. (ĐH Khối A - 2008) Giải phương trình: $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$

Bài 88. (ĐH KhốiB - 2008) Giải phương trình: $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$

Bài 89. (ĐH KhốiB - 2008) Giải phương trình: $2\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x$

Bài 90. (Db1-Khối A - 2008) Giải phương trình: $4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$

Bài 91. (Db2-Khối A - 2008) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\cos x-\sin x=0$

Bài 92. (Db1-Khối B - 2008) Giải phương trình: $\sin x\cos 2x+\cos x\left(\tan^2 x-1\right)+2\sin^3 x=0$

Bài 93. (Db2-Khối B - 2008) Giải phương trình: $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3\tan^2 x=\frac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}0$

Bài 94. (Db1-KhốiD - 2008) Giải phương trình: $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{\sin x}{\cos x+1}=2$

Bài 95. (Db2-KhốiD - 2008) Giải phương trình: $\sin 2x+\cos 2x+3\sin x-\cos x-2=0$

Bài 96. (ĐH Khối A - 2009) Giải phương trình: $\frac{1-2\sin x\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$

Bài 97. (ĐH Khối B - 2009) Giải phương trình: $\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$

Bài 98. (ĐH Khối D - 2009) Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0$

Bài 99. (Db1-KhốiA - 2009) Giải phương trình: $\frac{2\sin^2 x\cos x+\sqrt{3}\sin 2x\cos x-\sin 4x}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$

Bài 100. (Db2-KhốiA - 2009) Giải phương trình: $\sqrt{3}\left(2\cos^2 x+\cos x-2\right)+(3-2\cos x)\sin x=0$

Bài 101. (ĐH Khối A - 2010) Giải phương trình: $\frac{1+\sin x+\cos 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

Bài 102. (ĐH Khối B - 2010) Giải phương trình: $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$

Bài 103. (ĐH Khối D - 2010) Giải phương trình: $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$

Bài 104. (ĐH Khối A - 2011) Giải phương trình: $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=2\sin x.\sin 2x$

Bài 105. (ĐH Khối B - 2011) Giải phương trình: $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$

Bài 106. (ĐH Khối D - 2011) Giải phương trình: $\frac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$

Bài 107. (ĐH Khối A và A1- 2012) Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$

Bài 108. (ĐH Khối B - 2012) Giải phương trình: $2\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$

Bài 109. (ĐH Khối D - 2012) Giải phương trình: $\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$

Bài 110. (ĐH Khối A và A1- 2013) Giải phương trình: $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Bài 111. (ĐH KhốiB- 2013) Giải phương trình: $\sin 5x+2\cos^2 x=1$
Bài 112. (ĐH KhốiD- 2013) Giải phương trình: $\sin 3x+\cos 2x-\sin x=0$
Bài 113. (ĐH Khối A và A1- 2014) Giải phương trình: $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$
Bài 114. (ĐH KhốiB- 2014) Giải phương trình: $\sqrt{2}\left(\sin x-2\cos x\right)=2-\sin 2x$

Bài 115. (THPT Quốc Gia -2015) Tính giá trị của biểu thức $P=\left(1-3\cos 2x\right)\left(2+3\cos 2x\right)$,biết $\sin x=\frac{2}{3}$

Hướng dẫn các đề thi đại học

Bài 34. (ĐH Khối A - 2002) Tìm nghiệm thuộc khoảng $\left(0;2\pi\right)$ của phương trình:

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+\sin 2x}\right)=2\cos 2x+3$$

***Hd*:**
Điều kiện: $\sin 2x+1\neq 0$

$*\sin 3x+\cos 3x=3\sin x-4\sin^3 x+4\cos^3 x-3\cos x=3\left(\sin x-\cos x\right)-4\left(\sin^3 x-\cos^3 x\right)$

$=\left(\sin x-\cos x\right)\left[3-4\left(1+\sin x\cos x\right)\right]=\left(\sin x-\cos x\right)\left(-1-2\sin 2x\right)=\left(\cos x-\sin x\right)\left(1+2\sin 2x\right)$

$pt\Leftrightarrow 5\cos x=2\cos 2x+3\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}\vee x=\frac{5\pi}{3}$.

Bài 35. (ĐH Khối B - 2002) Giải phương trình: $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$

Hd :

$pt\Leftrightarrow \frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1+\cos 12x}{2}$

$\Leftrightarrow\left(\cos 12x+\cos 10x\right)-\left(\cos 8x+\cos 6x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin 9x\sin 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{9}\vee x=\frac{k\pi}{2},k\in Z.$

Bài 36. (ĐH Khối D - 2002) Giải phương trình: $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$

Hd :

$pt\Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x-4\left(2\cos^2 x-1\right)+3\cos x-4=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-8\cos^2 x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\mathrm{k}\pi,k\in Z.$

Bài 37. (Dự bị 1 -Khối A - 2002) Cho phương trình: $\frac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}=a$ (a là tham số)

a)Giải phương trình khi $a=\frac{1}{3}$.

b) Tìm a để phương trình có nghiệm.

Hd : a) Với a=1/3, $\sin x-2\cos x+3\neq 0,\forall x\in R.$

$pt\Leftrightarrow\frac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\mathrm{k}\pi,k\in Z.$

b) $pt\Leftrightarrow\frac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}=a\Leftrightarrow\left(2-a\right)\sin x+\left(1+2a\right)\cos x=3a-1\left(*\right)$

pt $(*)$ có nghiệm $(2-a)^2+(1+2a)^2\ge(3a-1)^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le a\le 2$

Bài 38. (Db 2 -Khối A - 2002) Giải phương trình: $\tan x+\cos x-\cos^2 x=\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)$

<u>*Hd :*</u> Điều kiện: $\cos x\ne 0\wedge\cos\frac{x}{2}\ne 0$.

Chú ý: $\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)=\sin x\dfrac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\sin x\dfrac{1}{\cos x}=\tan x$

Đs: $x=\text{k}2\pi,k\in Z$.

Bài 39. (Db 1 -Khối B- 2002) Giải phương trình: $\tan^4 x+1=\dfrac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$

<u>*Hd :*</u> Điều kiện: $\cos x\ne 0$.

pt $\Leftrightarrow \sin^4 x+\cos^4 x=\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x$

$\Leftrightarrow\left(2-\sin^2 2x\right)\left(1-2\sin 3x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\vee x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}$

Bài 40. (Db 2 -Khối B - 2002) Giải phương trình: $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\cot 2x-\dfrac{1}{8\sin 2x}$

<u>*Hd :*</u> Điều kiện: $\sin 2x\ne 0$.

pt $\Leftrightarrow \cos^2 2x-5\cos 2x+\frac{9}{4}=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$

Bài 41: (Db 1 -Khối D - 2002) Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{1}{8\cos^2 x}}=\sin x$

<u>*Hd :*</u> Điều kiện: $\sin x>0\wedge\cos x\ne 0$.

pt $\Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos^2 x=1\Leftrightarrow 2\sin^2 2x-1=0\Leftrightarrow\cos 4x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k2\pi;x=\frac{3\pi}{8}+k2\pi;x=\frac{5\pi}{8}+k2\pi$

Bài 42. (Db 2 -Khối D - 2002) Tìm m để phương trình:

$2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\cos 4x+2\sin 2x-m=0(*)$

Có ít nhất một nghiệm thuộc $[0;2\pi]$.

<u>*Hd :*</u> Đặt $t=\sin 2x, x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]$. $(*)$ có nghiệm $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow 3t^2-2t=m+3$ có nghiệm $t\in[0;1]$.

Đs: $\frac{-10}{3}\le m\le -2$.

Bài 43. (ĐH Khối A - 2003) Giải phương trình: $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$

<u>*Hd :*</u> Điều kiện: $\sin x\ne 0\wedge\cos x\ne 0\wedge\tan x\ne -1$.

pt $\Leftrightarrow\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\dfrac{\cos x\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x\right)}{\left(\cos x+\sin x\right)}+\sin x-\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow\left(\cos x-\sin x\right)\left(1-\cos x\sin x+\sin^2 x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

Bài 44. (ĐH Khối B - 2003) Giải phương trình: $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

Hd : Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$.

pt $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Bài 45. (ĐH Khối D - 2003) Giải phương trình: $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\frac{x}{2} = 0$

Hd : Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

pt $\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\cos x)(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 46. (Db 1-Khối A - 2003) Giải phương trình: $\cos 2x + \cos x\left(2\tan^2 x - 1\right) = 2$

Hd : Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

pt $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x\left[2\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - 1\right] = 2 \Leftrightarrow (1+\cos x)\left(2\cos^2 x - 5\cos x + 2\right) = 0$.

$\Leftrightarrow x = (2k+1)\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

Bài 47. (Db 2-Khối A - 2003) Giải phương trình: $3 - \tan x(\tan x + 2\sin x) + 6\cos x = 0$

Hd : Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

pt $\Leftrightarrow 8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Bài 48. (Db 1-Khối B - 2003) Giải phương trình: $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$

Hd : pt $\Leftrightarrow 3(1+\cos 4x) - 2\cos^2 x\left(4\cos^4 x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(-2\cos^4 x + 5\cos^2 x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = k\pi$.

Bài 49. (Db 2-Khối B - 2003) Giải phương trình: $\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$

Hd : Điều kiện: $2\cos x - 1 \neq 0$.

pt $\Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi$.

Bài 50. (Db 1-Khối D - 2003) Giải phương trình: $\frac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1+\sin x)$

Hd : Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 0$.

pt $\Leftrightarrow (1+\sin x)^2(1+\cos x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi; x = \pi + k2\pi$.

Bài 51. (Db 2-Khối D - 2003) Giải phương trình: $\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

Hd : Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$.

pt $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Bài 52. (ĐH Khối B - 2004) Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\tan^2 x$

Hd : Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

pt $\Leftrightarrow 5\sin x-2=3(1-\sin x)\dfrac{\sin^2 x}{(1-\sin x)(1-\sin x)}$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$.

Bài 53. (ĐH Khối D - 2004) Giải phương trình: $(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\sin x$

<u>*Hd :*</u> pt $\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\sin x+\cos x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi; x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$.

Bài 54. (Db 1-Khối A - 2004) Giải phương trình: $4(\sin^3 x+\cos^3 x)=\cos x+3\sin x$

<u>*Hd :*</u> $+\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình.
$+\cos x\neq 0$, Chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$

pt $\Leftrightarrow (\tan x-1)(\tan^2 x-\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi; x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

Bài 55. (Db2-Khối A - 2004) Giải phương trình: $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x}=1$

<u>*Hd :*</u> Bình phương hai vế đưa về phương trình đối xứng sinx và cosx.

Bài 56. (Db1-Khối B - 2004) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{\cos x}$

<u>*Hd :*</u> Nhân tử chung sinx + cosx.

Bài 57. (Db2-Khối B - 2004) Giải phương trình: $\sin 4x\sin 7x=\cos 3x\cos 6x$

<u>*Hd :*</u> Sử dụng công thức sina.sinb và cosa.cosb.

Bài 58. (Db1-Khối D - 2004) Giải phương trình: $2\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x=\sin 4x\cos x$

<u>*Hd:*</u> pt $\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x+\dfrac{1}{2}\sin 3x+\dfrac{1}{2}\sin x=\dfrac{1}{2}\sin 5x+\dfrac{1}{2}\sin 3x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x-\dfrac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x-\cos 2x\sin 3x=0$

Bài 59. (Db2-Khối D - 2004) Giải phương trình: $\sin x+\sin 2x=\sqrt{3}(\cos x+\cos 2x)$

<u>*Hd :*</u> **Mở rộng 2** phương trình bậc nhất theo sin và cos

Bài 60. (ĐH Khối A - 2005) Giải phương trình: $\cos^2 3x\cos 2x-\cos 2x=0$

<u>*Hd:*</u> pt $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(1+\cos 6x)\cos 2x-\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)=0 \Leftrightarrow \cos 6x\cos 2x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+\cos 2x-3=0 \Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{2}$

Bài 62. (ĐH Khối B- 2005) Giải phương trình: $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$

<u>*Hd:*</u> pt $\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(2\cos x+1)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi; x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{k}\,2\pi$

Bài 62. (ĐH Khối D- 2005) Giải phương trình: $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{3}{2}=0$

<u>*Hd:*</u> pt $\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x+\dfrac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin 2x\right]-\dfrac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x+\sin 2x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

Bài 63. (Db1-Khối A - 2005) Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình:

$$4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$$

<u>*Hd:*</u> pt $\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos(\pi-x)\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{18};x=\frac{17\pi}{18};x=\frac{5\pi}{6}$

Bài 64. (Db2-Khối A - 2005) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\cos x-\sin x=0$

<u>*Hd :*</u> $+\cos x=0$ là nghiệm của phương trình, ta có nhận nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$+\cos x\neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$

pt $\Leftrightarrow \tan x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

Bài 65. (Db1-KhốiB - 2005) Giải phương trình: $\sin x\cos 2x+\cos^2 x\left(\tan^2 x-1\right)+2\sin^3 x=0$

<u>*Hd :*</u> Điều kiện: $\cos x\neq 0$.

pt $\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$.

Bài 66. (Db2-KhốiB - 2005) Giải phương trình: $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3\tan^2 x=\frac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}$

<u>*Hd :*</u> Điều kiện: $\cos x\neq 0$.

pt $\Leftrightarrow \tan^3 x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Bài 67. (Db1-KhốiD - 2005) Giải phương trình: $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$

<u>*Hd :*</u> Điều kiện: $\sin x\neq 0$.

pt $\Leftrightarrow 2\sin x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$.

Bài 68. (Db2-KhốiD - 2005) Giải phương trình: $\sin 2x+\cos 2x+3\sin x-\cos x-2=0$

<u>*Hd:*</u> pt $\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\sin x-\cos x-1)=0$

Bài 69. (ĐH Khối A - 2006) Giải phương trình: $\frac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$

<u>*Hd :*</u> Điều kiện: $\sin x\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

pt $\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0$.

Bài 70. (ĐH Khối B - 2006) Giải phương trình: $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)=4$

<u>*Hd :*</u> Điều kiện: $\sin x\neq 0\wedge\cos x\neq 0\wedge\cos\frac{x}{2}\neq 0$.

pt $\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=4\Leftrightarrow\sin 2x=\frac{1}{2}$.

Bài 71. (ĐH Khối D - 2006) Giải phương trình: $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$

<u>*Hd :*</u> Cơ bản

Bài 72. (Db1-Khối A - 2006) Giải phương trình: $\cos 3x\cos^3 x - \sin 3x\sin^3 x = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$

Hd : pt $\Leftrightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 73. (Db2-Khối A - 2006) Giải phương trình: $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0$

Hd : pt $\Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\right) = 0$.

Bài 74. (Db1-Khối B - 2006) Giải phương trình: $\left(2\sin^2 x - 1\right)\tan^2 2x + 3\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0$

Hd : Điều kiện: $\cos x \neq 0$.
pt $\Leftrightarrow \cos 2x\left(\tan^2 2x - 3\right) = 0$.

Bài 75. (Db2-Khối B - 2006) Giải phương trình: $\cos 2x + \left(1 + 2\cos x\right)\left(\sin x - \cos x\right) = 0$

Hd : Nhân tử chung cosx – sinx.

Bài 76. (Db1-Khối D - 2006) Giải phương trình: $\cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = 1$

Hd : Nhân tử chung cosx – sinx.

Bài 77. (Db2-Khối D - 2006) Giải phương trình: $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$

Hd : Nhân tử chung sinx+1.

Bài 78. (ĐH Khối A - 2007) Giải phương trình: $\left(1 + \sin^2 x\right)\cos x + \left(1 + \cos^2 x\right)\sin x = 1 + \sin 2x$

Hd : Nhân tử chung cosx + sinx.

Bài 79. (ĐH Khối B - 2007) Giải phương trình: $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

Hd : $pt \Leftrightarrow -\cos 4x + \sin 7x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x\left(2\sin 3x - 1\right) = 0$

Bài 80. (ĐH Khối D - 2007) Giải phương trình: $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$

Hd : Bậc nhất theo sin và cos.

Bài 81. (Db1-Khối A - 2007) Giải phương trình: $\sin 2x + \sin x - \frac{1}{2\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x$

Hd : Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$.
pt $\Leftrightarrow \cos 2x\left(2\cos^2 x + \cos x + 1\right) = 0$.

Bài 82. (Db2-Khối A - 2007) Giải phương trình: $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1 = 3\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)$

Hd : $pt \Leftrightarrow 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

Bài 83. (Db1-Khối B - 2007) Giải phương trình: $\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{3x}{2}$

Hd : $pt \Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2}\left[2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\right] = 0$

Bài 84. (Db2-Khối B - 2007) Giải phương trình: $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \tan x - \cot x$

Hd : Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$.
pt $\Leftrightarrow \cos 2x = -\cos x$.

Bài 85. (Db1-Khối D - 2007) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\cos x = 1$

Hd : áp dung công thức sina.cosb

Bài 86. (Db2-Khối D - 2007) Giải phương trình: $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$

Hd : Nhân tử chung là sinx + cosx.

Bài 87. (ĐH Khối A - 2008) Giải phương trình: $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$

Hd : Nhân tử chung là sinx + cosx.

Bài 88. (ĐH KhốiB - 2008) Giải phương trình: $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$

Hd : Cách 1: chia $\cos^3 x$. Cách 2: Nhân tử chung là cos2x.

Bài 89. (ĐH KhốiB - 2008) Giải phương trình: $2\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x$

Hd : Nhân tử chung là 2cosx+1.

Bài 90. (Db1-Khối A - 2008) Giải phương trình: $4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$

Hd : **Mở rộng 1** bậc nhất theo sin và cos.

Bài 91. (Db2-Khối A - 2008) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\cos x-\sin x=0$

Hd : chia $\cos^3 x$.

Bài 92. (Db1-Khối B - 2008) Giải phương trình: $\sin x\cos 2x+\cos x\left(\tan^2 x-1\right)+2\sin^3 x=0$

Hd : Đưa về phương trình bậc cao theo sin.

Bài 93. (Db2-Khối B - 2008) Giải phương trình: $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3\tan^2 x=\frac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}$

Hd : pt $\Leftrightarrow \tan^3 x=-1$.

Bài 94. (Db1-KhốiD - 2008) Giải phương trình: $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{\sin x}{\cos x+1}=2$

Hd : Qui đồng và đặt nhân tử chung

Bài 95. (Db2-KhốiD - 2008) Giải phương trình: $\sin 2x+\cos 2x+3\sin x-\cos x-2=0$

Hd : Nhân tử chung là 2sinx -1.

Bài 96. (ĐH Khối A - 2009) Giải phương trình: $\frac{1-2\sin x\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$

Hd : **Mở rộng 2** bậc nhất theo sin và cos.

Bài 97. (ĐH Khối B - 2009) Giải phương trình: $\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$

Hd : $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\Leftrightarrow \sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$.

Bài 98. (ĐH Khối D - 2009) Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0$

Hd : Sử dụng công thức sina.cos

Bài 99. (Db1-KhốiA - 2009) Giải phương trình: $\frac{2\sin^2 x\cos x+\sqrt{3}\sin 2x\cos x-\sin 4x}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$

Hd : Nhân tử chung là sin2x

Bài 100. (Db2-KhốiA - 2009) Giải phương trình: $\sqrt{3}\left(2\cos^2 x+\cos x-2\right)+(3-2\cos x)\sin x=0$

Hd : Nhân tử chung là 3-2cosx

Bài 101. (ĐH Khối A - 2010) Giải phương trình: $\dfrac{1+\sin x+\cos 2x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

<u>*Hd :*</u> Vế trái rút gọn được mẫu.

Bài 102. (ĐH Khối B - 2010) Giải phương trình: $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$

<u>*Hd:*</u>

$pt \Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x-\sin x+\cos 2x\cos x+2\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\dfrac{1+\cos 2x}{2}-\sin x+\cos 2x(\cos x+2)=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+\cos x+2)=0$

Vế trái rút gọn được mẫu.

Bài 103. (ĐH Khối D - 2010) Giải phương trình: $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$

<u>*Hd :*</u> Nhân tử chung là 2sinx-1.

Bài 104. (ĐH Khối A - 2011) Giải phương trình: $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=2\sin x.\sin 2x$

<u>*Hd :*</u> Nhân tử chung là cosx.

Bài 105. (ĐH Khối B - 2011) Giải phương trình: $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$

<u>*Hd :*</u> Nhân tử chung là cosx.

Bài 106. (ĐH Khối D - 2011) Giải phương trình: $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$

<u>*Hd :*</u> Nhân tử chung là sinx + 1.

Bài 107. (ĐH Khối A và A1- 2012) Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$

<u>*Hd :*</u> Nhân tử chung là cosx.

Bài 108. (ĐH Khối B - 2012) Giải phương trình: $2\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$

<u>*Hd :*</u> **Mở rộng 2** bậc nhất theo sin và cos.

Bài 109. (ĐH Khối D - 2012) Giải phương trình: $\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$

<u>*Hd :*</u> Nhân tử chung là cos2x.

Bài 110. (ĐH Khối A và A1- 2013) Giải phương trình: $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

<u>*Hd :*</u> Nhân tử chung là sinx+cosx.

Bài 111. (ĐH KhốiB- 2013) Giải phương trình: $\sin 5x+2\cos^2 x=1$

<u>*Hd :*</u> pt $\Leftrightarrow \sin 5x=-\cos 2x$

Bài 112. (ĐH KhốiD- 2013) Giải phương trình: $\sin 3x+\cos 2x-\sin x=0$

<u>*Hd :*</u> Nhân tử chung là cos2x.

Bài 113. (ĐH Khối A và A1- 2014) Giải phương trình: $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$

<u>*Hd :*</u> Nhân tử chung là 2cosx -1.

Bài 114. (ĐH KhốiB- 2014) Giải phương trình: $\sqrt{2}(\sin x-2\cos x)=2-\sin 2x$

<u>*Hd :*</u> Nhân tử chung là $\sin x-\sqrt{2}$ sinx+cosx.

Bài 115. (THPT Quốc Gia -2015) Tính giá trị của biểu thức $P=(1-3\cos 2x)(2+3\cos 2x)$,biết $\sin x=\dfrac{2}{3}$

....

Phần 4.Đề Thi Trung Học Phổ Thông Quốc Gia

Bài 116. (Quảng Nam) Cho góc α thỏa mản $5\sin 2\alpha - 6\cos\alpha = 0$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(2015\pi - \alpha) - \cot(2016\pi + \alpha)$.

Bài 117. (THPT Khoái Châu) Giải phương trình: $\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Bài 118. (THPT Trần Hưng Đạo) Giải phương trình: $2\cos 5x\cos 3x + \sin x = \cos 8x$.

Bài 119. (Chuyên Vinh) Giải phương trình: $\cos x + \sin 2x = \sin x + \sin 2x\cot x$.

Bài 120. (Chuyên Lê Hồng Phong lần 1) Giải phương trình: $4\sin^2\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + \cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

Bài 121. (Chuyên Lê Hồng Phong lần 2) Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Bài 122. (Chuyên Lê Hồng Phong lần 3) Giải phương trình: $\cos 2x + 7\cos x + 4 = 0$.

Bài 123. (Lê Quý Đôn – Tây Ninh) Cho góc x thỏa mản $\tan x = 2$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{8\cos^3 x - 2\sin^3 x + \cos x}{2\cos x - \sin^3 x}$.

Bài 124. (THPT Mạc Đỉnh Chi) Giải phương trình: $\sin 2x - \cos x + \sin x = 1$.

Bài 125. (THPT Nguyễn Huệ lần1) Giải phương trình: $\sin 2x - 2\cos^2 x = 3\sin x - \cos x$.

Bài 126. (THPT Nguyễn Huệ lần2) Giải phương trình: $4\sin 5x\sin x = 2\cos 4x + \sqrt{3}$.

Bài 127. (THPT Nguyễn Hữu Huân) Giải phương trình: $\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x + 3\sin x - 3\sin^2 x = 0$.

Bài 128. (THPT Nguyễn Thị Minh Khai) Giải phương trình:

$$\sin 2x - (\sin x + \cos x - 1)(2\sin x - \cos x - 3) = 0.$$

Bài 129.(THPT Nguyễn Thị Minh Khai) Giải phương trình: $\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0$.

Bài 130. (THPT Nguyễn Trãi) Giải phương trình: $\cos 2x - \sin 3x + 2\cos 2x\sin x = 0$.

Bài 131. (THPT Phan Bội Châu) Giải phương trình: $2\cos x(1 + \sin x) - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Bài 132. (THPT Phan Bội Châu) Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^4 x = 1$.

Bài 133. (TTLT Diệu Hiền lần1) Giải phương trình: $\sin 2x + 3\sin x = \cos 2x + \cos x + 1$.

Bài 134. (TTLT Diệu Hiền lần2) Giải phương trình: $\cos 2x(4\sin x + 1) - \sqrt{3}\sin 2x = 1$.

Bài 135. (TTLT Diệu Hiền lần3) Giải phương trình: $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\cos x = 0$.

Bài 136. (TTLT Diệu Hiền lần4) Giải phương trình: $\sin 2x + 2\sin x + 1 = \cos 2x$.

Bài 137. (TTLT Diệu Hiền lần5) Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$.

Bài 138. (TTLT Diệu Hiền lần6) Giải phương trình: $2\sin 2x - \sqrt{3} = 2\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)$.

Bài 139. (TTLT Diệu Hiền lần7) Giải phương trình: $\sin 2x - \sin x = 2 - 4\cos x$.

Bài 140. (TTLT Diệu Hiền lần8) Cho $\cos x = -\frac{1}{3}, x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính $P = \frac{1 + 2\tan x}{1 - \tan x}$.

Bài 141. (TTLT Diệu Hiền lần9) Giải phương trình: $\cos x + 2\sin x(1 - \cos x)^2 = 2 + 2\sin x$.

Bài 143. (Chuyên –Sư Phạm Hà Nội lần 1) Cho $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1-\cos x}}=\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Bài 144. (Chuyên Vĩnh Phúc lần 2) Giải phương trình:

$$\left(\tan 2x\cot x-1\right)\sin 4x=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}.$$

Bài 145. (Chuyên Vĩnh Phúc lần 3) Giải phương trình: $2\cos 6x+2\cos 4x-\sqrt{3}\cos 2x=\sin 2x+\sqrt{3}$.

Bài 146. (THPT-Đặng Thúc Hứa- Nghệ An) Giải phương trình: $\cos 2x+\sin x=1+\sqrt{3}\sin 2x$.

Bài 147. (Toán học và Tuổi Trẻ) Giải phương trình: $\tan x\cot 2x=\left(1+\sin x\right)\left(4\cos^2 x+4\sin x-5\right)$.

Bài 148. (Chuyên –Sư Phạm Hà Nội lần 2) Giải phương trình:

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 2x}{\cos^2 x}=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Bài 149. (THPT Đông Sơn) Giải phương trình: $\cos 2x+\left(1+2\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)=0$.

Bài 150. (THPT Gang Thép) Giải phương trình: $\cos x+\sin x-\sin 2x-\cos 2x=1$.

Bài 151. (THPT Gia Viễn) Giải phương trình: $\cos x\left(1-\cos x\right)=\sin x\left(\sin x-1\right)$.

Bài 152. (THPT Hàn Thuyên lần1) Giải phương trình:

$$4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos x+\cos 2x-2\sin x+2.$$

Bài 153. (THPT Hàn Thuyên lần2) Giải phương trình: $\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x-2\cos x=0$.

Bài 154. (THPT Hàn Thuyên lần3) Giải phương trình: $\sqrt{2}\cos 2x+\sin x-\cos x=0$.

Bài 155. (THPT Hùng Vương) Giải phương trình: $\left(\cos x+\sin x\right)^2-\sqrt{3}\cos x=1+2\cos x$.

Bài 156. (THPT Chu Văn An) Giải phương trình: $\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x=1+\cos x+\cos^2 x$.

Bài 157. (THPT Cẩm Bình) Giải phương trình: $\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}-\cot 2x=1$.

Bài 158. (THPT Thanh Chương-Nghệ An) Giải phương trình: $\sin 2x-\cos 2x=1+\sqrt{3}\left(\sin x-\cos x\right)$.

Bài 159. (Bình Dương) Giải phương trình: $\sin x-\sqrt{3}\cos x+2=4\cos^2 x$.

Bài 160. (Lâm Đồng) Giải phương trình: $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=1-\sin 2x$.

Không có việc gì khó
Chỉ sợ lòng không bền
Đào núi và lấp biển
Quyết chí ắt làm nên!
Chủ Tịch Hồ Chí Minh